

EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

1) Comprueba la igualdad:

$$\frac{2\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{tg}(2a)} = \cos(a) - \frac{\operatorname{sen}^2(a)}{\cos(a)}$$

Solución:

Desarrollamos el primer miembro de la igualdad, se tiene:

$$\frac{2\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{tg}(2a)} = \frac{2\operatorname{sen}(a)\cos(2a)}{\operatorname{sen}(2a)} = \frac{2\operatorname{sen}(a)(\cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a))}{2\operatorname{sen}(a)\cos(a)} = \frac{\cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)}{\cos(a)} = \cos(a) - \frac{\operatorname{sen}^2(a)}{\cos(a)}$$

2) Comprueba la igualdad:

$$\operatorname{sen}(3a) = \operatorname{sen}(a)(3\cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a))$$

Solución:

$$\operatorname{sen}(3a) = \operatorname{sen}(a+2a) = \operatorname{sen}(a)\cos(2a) + \cos(a)\operatorname{sen}(2a) = \operatorname{sen}(a)(\cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)) + 2\operatorname{sen}(a)\cos^2(a)$$

Extrayendo factor común $\operatorname{sen}(a)$, se tiene:

$$\operatorname{sen}(3a) = \operatorname{sen}(a)(3\cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a))$$

3) Demuestra la igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen}(5a) + \operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(3a) - \operatorname{sen}(a)} = 1 + 2\cos(2a)$$

Solución:

Expresando la suma y la diferencia de senos del numerador y denominador como un producto, se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}(5a) + \operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(3a) - \operatorname{sen}(a)} = \frac{2\operatorname{sen}(3a)\cos(2a)}{2\cos(2a)\operatorname{sen}(a)} = \frac{\operatorname{sen}(3a)}{\operatorname{sen}(a)} = \frac{\operatorname{sen}(a)\cos(2a) + \cos(a)\operatorname{sen}(2a)}{\operatorname{sen}(a)}$$

Desarrollando el seno del ángulo doble, se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}(5a) + \operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(3a) - \operatorname{sen}(a)} = \cos(2a) + \frac{2\operatorname{sen}(a)\cos^2(a)}{\operatorname{sen}(a)} = \cos(2a) + 2\cos^2(a) = \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a) + 2\cos^2(a)$$

Por tanto:

$$\frac{\operatorname{sen}(5a) + \operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(3a) - \operatorname{sen}(a)} = 1 - \operatorname{sen}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a) + 2\cos^2(a) = 1 + 2(\cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)) = 1 + 2\cos(2a)$$

4) Transforma en suma las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{sen}(3x) \cdot \cos(5x)$

Solución

$$\operatorname{sen}(3x) \cdot \cos(5x) = -\frac{1}{2}[\cos(3x+5x) - \cos(3x-5x)] = -\frac{1}{2}[\cos(8x) - \cos(-2x)] = -\frac{1}{2}[\cos(8x) - \cos(2x)]$$

b) $\cos(4x) \cdot \operatorname{sen}(2x)$

Solución

$$\cos(4x) \cdot \operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(4x+2x) + \operatorname{sen}(2x-4x)] = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(6x) + \operatorname{sen}(-2x)] = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(6x) - \operatorname{sen}(2x)]$$

5) Simplifica la siguiente expresión: $\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha$.

a) Indicación: Debes sustituir $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ y operando correctamente obtendrás $\frac{1}{\cos \alpha}$.

6) Simplifica: $\frac{\cos \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} - \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$

a) Indicación: El m.c.m. es $(1 - \operatorname{sen} \alpha) \cdot \cos \alpha$ y operando correctamente te saldrá al final una fracción que lleva en el numerador $1 - 1$, luego el resultado es 0.

7) Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{sen} \alpha$

b) $\frac{2 \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha + 1}{\cos \alpha}$

c) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cot} g \alpha)^2 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

indicación: $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cot} g \alpha)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}$

d) $\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha}$

Soluciones: a) $\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$; b) $3 \cos \alpha$; c) 0; d) $2 \operatorname{tg} \alpha$

8) Simplifica: $\frac{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha}$

Solución: $\operatorname{tg} \alpha$

9) Simplifica: $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x$

Solución: $2 \operatorname{sen} x \cos x$