SUCESIONES

DEFINICIÓN DE SUCESIÓN

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero,....

Los elementos de la sucesión se llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con los subíndices correspondientes a los lugares que ocupan en la sucesión:

$a_1, a_2, a_3, ...$

TÉRMINO GENERAL DE UNA SUCESIÓN

Se llama **término general** de una sucesión, y se simboliza con $\mathbf{a_n}$, al término que representa uno cualquiera de ella.

- Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula: $a_n = f(n)$. Dándole a n un cierto valor natural, se obtiene el término correspondiente.
- En otras sucesiones, para hallar un término es necesario operar con dos o más de los anteriores y se llaman **sucesiones recurrentes**. Para hallar un término concreto hay que obtener, previamente, todos los anteriores.

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Definición: Una progresión aritmética es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando una cantidad fija, llamada **diferencia** de la progresión.

Término general, a_n, de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d se obtiene así: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Suma de los n-primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Definición: Una progresión geométrica es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por una cantidad fija, llamada **razón** de la progresión.

Término general, a_n, de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón es r se obtiene así: $a_n = a_1.r^{n-1}$

Suma de los n-primeros términos de una progresión geométrica con $r \neq 1$ es:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{a_n.r - a_1}{r-1} = \frac{a_1.r^n - a_1}{r-1}$$

Suma de infinitos términos de una progresión geométrica en la que $|r| < 1$ es:

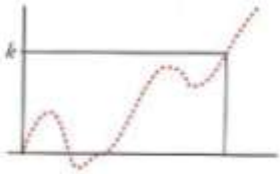
$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

CLASIFICACIÓN DE LAS SUCESIONES SEGÚN SU LÍMITE

- Si tienen limite finito: **Convergentes**
- Si tienen límite infinito (+∞ ó -∞): **Divergentes**
- Si no tienen límite: **Oscilantes**

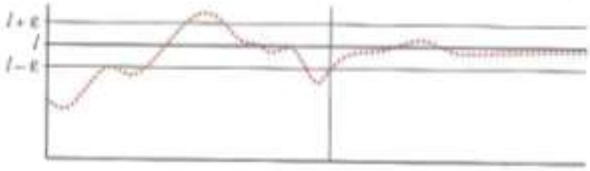
El límite es infinito

$lím\ a_n = +\infty \Leftrightarrow$ Podemos conseguir que sus valores sean tan grandes como queramos (superando cualquier número k tan grande como deseemos) dándole a n valores suficientemente grandes.



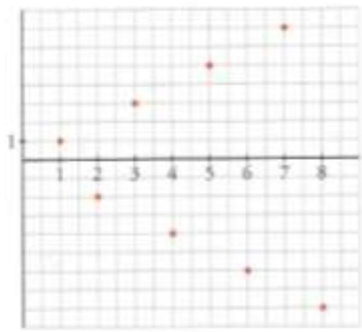
El límite es un número l (sucesión convergente)

$lím\ a_n = l \Leftrightarrow$ Podemos conseguir que sus valores estén tan cerca de l como queramos (a menos de una distancia ε —se lee *épsilon*— tan pequeña como deseemos) dándole a n valores suficientemente grandes.



Sucesiones oscilantes

La sucesión 1, –2, 3, –4, 5, –6, …, 105, –106, … cuyo término general es $(-1)^{n+1} \cdot n$, da saltos hacia arriba y hacia abajo al representarla.



Es claro que no tiene límite $+\infty$ ni $-\infty$. Tampoco se acerca a ningún número concreto. Se le llama sucesión **oscilante.**

También es oscilante, por ejemplo:

1, –1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, …

Estas sucesiones son divergentes.

RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Tipo ∞ - ∞

MÉTODO: Se elimina la indeterminación quedándonos con el término de mayor grado.

Ejemplos:

a) $\lim (-n^2 + 2n + 1) = \lim (-n^2) = -\infty$
b) $\lim (n^3 - n^2) = \lim n^3 = \infty$

Tipo ∞/∞

MÉTODO: Se elimina la indeterminación dividiendo numerador y denominador por la potencia de mayor grado de n

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n^2-2}{2n^2-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+1/n-2/n^3}{2/n-1/n^3} = \dfrac{1}{0} = \infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n^2-2}{-n^4-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1/n+1/n^2-2/n^4}{-1-1/n^4} = \dfrac{0}{1} = 0$

Si hay radicales (Inderminación ∞ - ∞)

MÉTODO : Se elimina la indeterminación multiplicando y dividiendo por el conjugado, para quitarnos la raíz.

Ejemplos:

a) $\lim \quad \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \lim \dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} =$

$= \lim \dfrac{(n^2+1)-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \lim \dfrac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \dfrac{2}{\infty} = 0$

4 Tipo 1^∞

MÉTODO : Se resuelve utilizando el "número e"

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7118281 \qquad \lim \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e = 2{,}7118281$$

Ejemplos:

a) $\lim \left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{n-1} = \lim \left[\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{1}{n+2}(n-1)} = e^{\lim \frac{n-1}{n+2}} = e^1 = e$

EJERCICIO 1 : Calcular a_2, a_5, a_{40}, a_{n+1}, a_{2n} en las siguientes sucesiones definidas por :

a) $a_n = 1 - 2n$ b) $b_n = \frac{3n+1}{4n}$ c) $c_n = 1 - \frac{2n}{3}$

d) $d_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n-2}{n+1}$ e) $e_n = \sqrt{1+4n}$

EJERCICIO 2 : La sucesión definida por $a_n = n^2 - 16$. ¿ Tiene algún término que valga 33?, ¿ 0 ?, ¿ -12 ?, ¿ 8 ?, ¿ -16 ?

EJERCICIO 3 : Escribir los cuatro primeros términos de la sucesión:

a) $a_n = \frac{2n+3}{3.2^n}$ b) $b_n = (-1)^n.(n+1)^2$ c) $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

EJERCICIO 4 : Escribe el término octavo de las siguientes sucesiones recurrentes:

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ b) $a_n = 2.a_{n-1} - 3.a_{n-2} + 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$

EJERCICIO 5 : Hallar el primer término de una progresión aritmética y la diferencia sabiendo que $a_3 = 20$ y $a_{15} = 140$

EJERCICIO 6 : Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 5, que la diferencia es 8 y el término n-ésimo es 93, hallar el lugar que ocupa dicho término en la sucesión.

EJERCICIO 7 : El producto de tres términos consecutivos de una progresión aritmética es 1.155 y la suma del primero y el último es 22. ¿Cuáles son dichos números?

EJERCICIO 8 : La suma de los nueve primeros términos de una progresión aritmética es 450 y la diferencia de los extremos es 40. Halla dichos términos.

EJERCICIO 9 : Calcular las dimensiones de un ortoedro sabiendo que están en progresión aritmética, que suman 24 m y que el volumen del ortoedro es 384 m_2.

EJERCICIO 10 : Sabiendo que el sexto término de una progresión geométrica es 2 y que la razón es 1/3, halla el primer término.

EJERCICIO 11 : Descompón el número 65 en tres sumandos que formen progresión geométrica y tal que el producto del primero por el tercero sea 225.

EJERCICIO 12 : El primer término de una progresión geométrica es 7 y el tercero es 63. Calcular el producto de los diez primeros términos.

EJERCICIO 13 : Tres números están en progresión geométrica. El segundo es 15 unidades mayor que el primero y el tercero 60 unidades mayor que el segundo. Halla dichos números.

EJERCICIO 14 : Forma una progresión aritmética de siete términos en la que –2 y 28 sean los extremos

EJERCICIOS DE LÍMITES DE SUCESIONES: (los siguientes del libro de texto)

- Ejercicio nº 27 y 28 página 201
- Ejercicio nº 31 y 32 página 203
- Ejercicio nº 68 , 69 y 70 página 209